CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2019

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

e-math.pl Ty wybierasz czas i miejsce

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **9 maja 2019 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

UZUPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
- [ ] dostosowania kryteriów oceniania
- [ ] nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 22 strony (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◙ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
10. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
11. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-R1_1P-192

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Dla dowolnych liczb $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$ wartość wyrażenia $\left(\log_{\frac{1}{x}} y\right)\cdot\left(\log_{\frac{1}{y}} x\right)$ jest równa

A. $x\cdot y$ **B.** $\frac{1}{x\cdot y}$ **C.** -1 **D.** 1

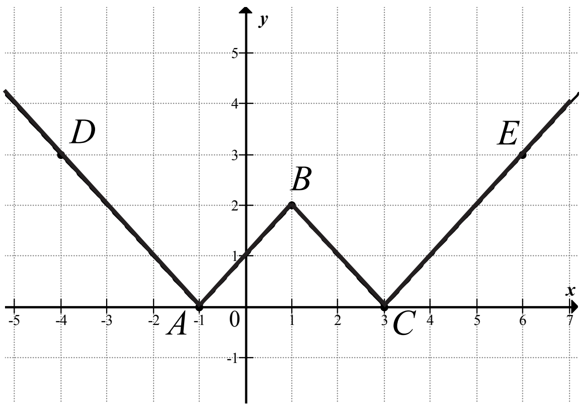
Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 3. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y=f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC, gdzie $A=(-1,0)$, $B=(1,2)$, $C=(3,0)$, $D=(-4,3)$, $E=(6,3)$.



Wzór funkcji f to

A. $f(x)=|x+1|+|x-1|$

B. $f(x)=||x-1|-2|$

C. $f(x)=||x-1|+2|$

D. $f(x)=|x-1|+2$

Zadanie 4. (0–1)

Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B', przeciwnego do zdarzenia B, jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A\mid B)=\frac{1}{5}$. Wynika stąd, że

A. $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ **B.** $P(A\cap B)=\frac{4}{15}$ **C.** $P(A\cap B)=\frac{3}{20}$ **D.** $P(A\cap B)=\frac{4}{5}$

BRUDNOPIS

Zadanie 5. (0–2)
Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right)$$

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9	5	2

Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

(1+3+5+7+9) * 4! * (10000+1000+100+10+1) =
= 25 * 24 * 11111 =
= 6 666 600

Odpowiedź: 6 666 600 .

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0–2)

Punkt $P=(10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y=2x^2+x+2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y=ax+b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

7. $P(10; 2429) \in f(x) = 2x^2 + x + 2219$

$y = ax + b$ jest styczną w P

$f'(x) = 4x + 1$

$f'(10) = 41 \qquad a = f'(10) = 41$

$y = 41x + b$

$2429 = 41 \cdot 10 + b$

$b = 2429 - 410 = 2019$

Odp. $b = 2019$

Odpowiedź: ....

Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2$.

8. $x>0,\ y>0,\ a>0,\ y>x$

$$\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2 \quad /\cdot \overset{>0}{(y+a)}\cdot \overset{>0}{x}$$

$$(x+a)x+y(y+a)-2x(y+a)>0$$

$$x^2+ax+y^2+ay-2xy-2ax>0$$

$$(x-y)^2+ay-ax>0$$

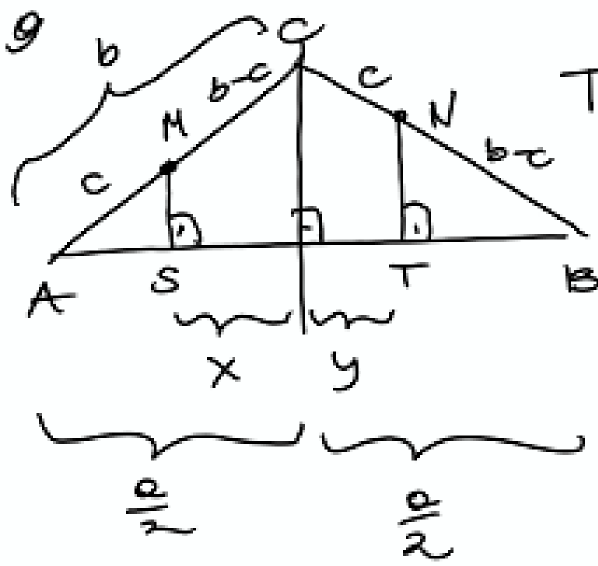
$$\underbrace{\underbrace{(x-y)^2}_{\text{nieujemne}}+\underbrace{a\underbrace{(y-x)}_{\text{dodatnie}}}_{\text{dodatnie}}}_{\text{dodatnie}}>0$$

cnd.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	7.	8.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 9. (0–3)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM|=|CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST|=\frac{1}{2}|AB|$.



T: $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$

z tw. Talesa; $\frac{b-c}{x} = \frac{c}{y}$

(1) $by - cy = cx$ $\qquad cx + cy = by$

$c(x+y) = by$

$x+y = \frac{by}{c}$

(2) $\frac{c}{y} = \frac{b-c}{\frac{a}{2}-y}$ $\qquad \frac{1}{2}ac - \cancel{cy} = by - \cancel{cy}$

$y = \frac{ac}{2b}$

$x+y = \frac{\cancel{b} \cdot \frac{a \cdot \cancel{c}}{2\cancel{b}}}{\cancel{c}} = \frac{a}{2} \Rightarrow |ST| = \frac{1}{2}|AB|$

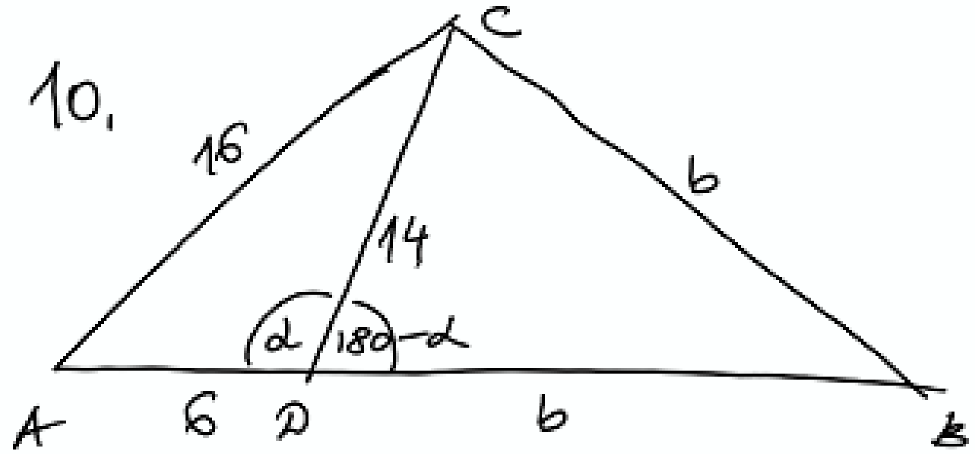
cnd

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	9.
	Maks. liczba pkt	3
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 10. (0–4)

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

10.



2 tw. cosinusów dla ΔADC

$$16^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos\alpha$$

$$256 = 196 + 36 - 168 \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{24}{168} = -\frac{1}{7}$$

$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{7}$$

2 tw. cosinusów dla ΔDBC

$$b^2 = 14^2 + b^2 - 2 \cdot 14 \cdot b \cos(180-\alpha)$$

$$196 = \cancel{28}^{4} b \cdot \frac{1}{\cancel{7}_1}$$

$$b = \frac{196}{4} = 49$$

Odp.

$$L = 16 + 6 + 2b =$$

$$= 22 + 98 = 120$$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 11. (0–6)

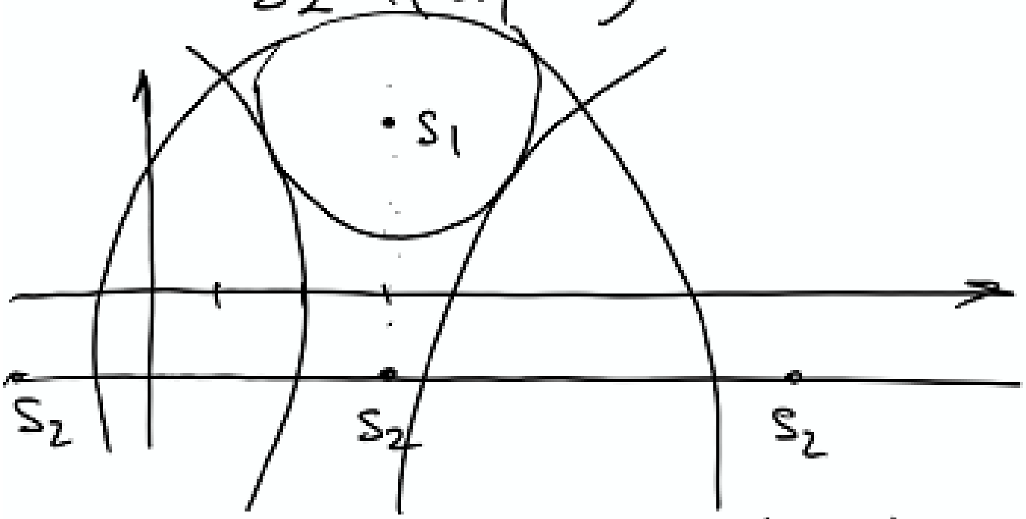
Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru *a*, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

11. $O_1: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 9$

$S_1 = (6,4) \quad r = 3$

$O_2: (x-a)^2 + (y+2)^2 = 81$

$S_2 = (a, -2) \quad r = 9$



STYCZNE ZEWNĘTRZNIE: $|S_1S_2| = 12$

$|S_1S_2| = \sqrt{(6-a)^2 + 6^2}$

$36 - 12a + a^2 + 36 = 144 \quad a^2 - 12a - 72 = 0$

$\Delta = 144 + 288 = 432 \quad \sqrt{\Delta} = 12\sqrt{3}$

$a_1 = \frac{12 + 12\sqrt{3}}{2} = 6 + 6\sqrt{3} \quad a_2 = 6 - 6\sqrt{3}$

STYCZNE WEWNĘTRZNIE: $|S_1S_2| = 6$

$a^2 - 12a + 36 = 0 \quad (a-6)^2 = 0 \quad a = 6$

$a_1 = 6 + 6\sqrt{3},\ a_2 = 6 - 6\sqrt{3},\ a_3 = 6$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	11.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 12. (0–6)

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

12.

$$2b = a + c \qquad a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\frac{2a}{3b} = \frac{3b}{2(2a+2b+c)} \quad / \cdot 2$$

$$q_1 = \frac{2a}{3b} = \frac{2}{3}\,\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} = x$$

$$\frac{4a}{3b} = \frac{3b}{2a+2b+2b-a} \cdot \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}}$$

$$\frac{4}{3}x = \frac{3}{\frac{a}{b}+4}$$

$$\frac{4}{3}x = \frac{3}{x+4} \qquad 9 = 4x^2 + 16x$$

$$4x^2 + 16x - 9 = 0$$

$$\Delta = 256 + 144$$

$$x_1 = \frac{-16-20}{8} = -4{,}5$$ nie sp.

$$x_2 = \frac{-16+20}{8} = \frac{1}{2}$$

$$q_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Odpowiedź: q = 1/3 ....

Wypełnia egzaminator	**Nr zadania**	**12.**
	Maks. liczba pkt	**6**
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–6)

Wielomian określony wzorem $W(x)=2x^3+(m^3+2)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x)\le 0$.

13.

$W(2)=0$

$W(-1)=6$

$W(2)=2\cdot 8+(m^3+2)\cdot 4-11\cdot 2-2(2m+1)=$

$=16+4m^3+8-22-4m-2=$

$=4m^3-4m$

$W(-1)=2\cdot(-1)+(m^3+2)\cdot 1+11-4m-2$

$=-2+m^3+2+11-4m-2=$

$=m^3-4m+9$

$4m^3-4m=0 \quad \wedge \quad m^3-4m+9=6$

$m^3-4m+3=0$

$4m(m^2-1)=0 \qquad m^3-m-3m+3=0$

$4m(m-1)(m+1)=0 \qquad m(m^2-1)-3(m-1)=$

$m(m-1)(m+1)-3(m-1)$

$m=0 \vee m=1 \vee m=-1 \qquad (m-1)[m^2+m-3]=0$

Odp.: $m=1 \qquad m=1 \vee m=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

13, cd.

$W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \leq 0$

$W(2) = 0$

	2	3	-11	-6
2	2	7	+3	0

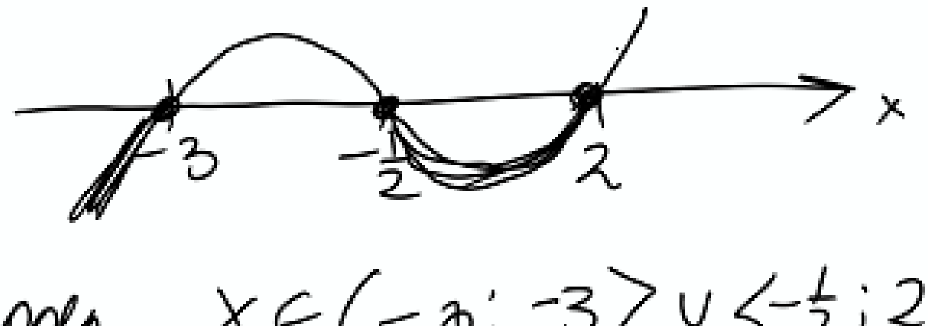
$W(x) = (x-2)(2x^2 + 7x + 3)$

$\Delta = 49 - 24 = 25$

$x_1 = \frac{-7-5}{4} = -3$

$x_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$

$2(x-2)(x+3)(x+\frac{1}{2}) \leq 0$



odp. $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}; 2\rangle$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

14.

$x \in R$

$$\cos x\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$$

$$\cos x\left[2\cdot\sin\frac{x-\cancel{\frac{\pi}{3}}+x+\cancel{\frac{\pi}{3}}}{2}\cdot\cos\frac{\cancel{x}-\frac{\pi}{3}-\cancel{x}-\frac{\pi}{3}}{2}\right]=\frac{1}{2}\sin x$$

$$\cos x\cdot 2\cdot\sin x\cdot\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\sin x=0$$

$$\cos x\cdot\cancel{2}_1\sin x\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1}-\frac{1}{2}\sin x=0$$

$$\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\sin x=0 \quad \vee \quad \cos x=\frac{1}{2}$$

$\alpha=\frac{\pi}{3}$

I v IV

odp: $x_1=0+k\pi \quad \vee \quad x_2=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\vee \quad x_3=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$

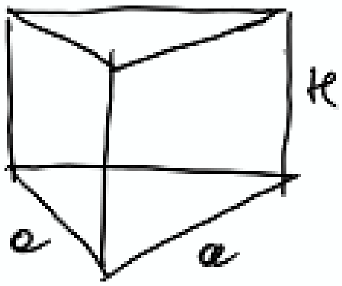
Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–7)

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

15.



$V = 2$

a dla P_c minimalne

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 2 \Rightarrow H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}}$$

$$P_c = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} + 3aH$$

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \cancel{a} \cdot \frac{8}{a^2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a} = \frac{a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a}$$

$a > 0 \wedge H > 0$

$$P_c(a) = \frac{a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2a}$$

$$P_c'(a) = \frac{3\sqrt{3}a^2 \cdot 2a - 2\left(a^3\sqrt{3} + 16\sqrt{3}\right)}{4a^2}$$

15 cd.

$P_c'(a)=0 \iff \frac{4\sqrt{3}a^3-32\sqrt{3}}{4a^2}=0$

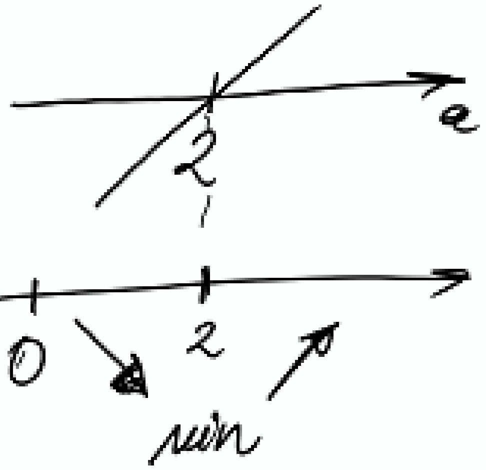
$4\sqrt{3}a^3-32\sqrt{3}=0$

$4\sqrt{3}(a^3-8)=0$

$a=2$

znak $P_c'(a)$

szkic $P_c(a)$



Odp. Dla $a=2$ pole jest najmniejsze i wynosi $P_c(2)=6\sqrt{3}$

Odpowiedź: ....

<table>
<tr><td rowspan="3">Wypełnia egzaminator</td><td>Nr zadania</td><td>15.</td></tr>
<tr><td>Maks. liczba pkt</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Uzyskana liczba pkt</td><td></td></tr>
</table>

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***