CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2017

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | | | **PESEL** | | | | | | | | | | |

miejsce na naklejkę

e-math.pl

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **9 maja 2017 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

UZUPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

☐ dostosowania kryteriów oceniania

☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę

NOWA FORMUŁA

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◉ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
7. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.
10. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
11. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA 2017

Układ graficzny
© CKE 2015

W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

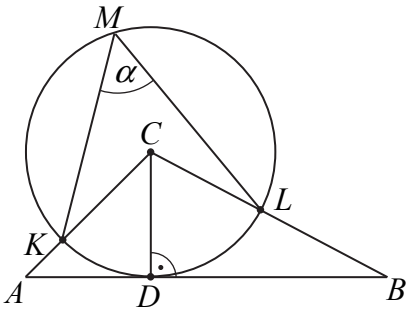
Zadanie 2. (0–1)

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n=\frac{\left(n^2-10n\right)\left(2-3n\right)}{2n^3+n^2+3}$ dla $n\geq 1$. Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ **B.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ **C.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ **D.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\frac{3}{2}$

Zadanie 3. (0–1)

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC, w którym $|AD|=|CD|=\frac{1}{2}|BC|$ (zobacz rysunek). Okrąg o środku C i promieniu CD jest styczny do prostej AB. Okrąg ten przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach K i L.



Zaznaczony na rysunku kąt α wpisany w okrąg jest równy

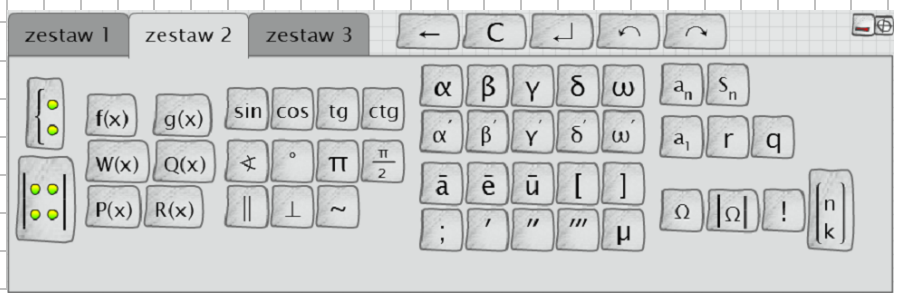
A. $37,5°$ **B.** $45°$ **C.** $52,5°$ **D.** $60°$

Zadanie 4. (0–1)

Dane są punkt $B=\left(-4,7\right)$ i wektor $\vec{u}=\left[-3,5\right]$. Punkt A, taki, że $\overrightarrow{AB}=-3\vec{u}$, ma współrzędne

A. $A=\left(5,-8\right)$ **B.** $A=\left(-13,22\right)$ **C.** $A=\left(9,-15\right)$ **D.** $A=\left(12,24\right)$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*



Zadanie 5. (0–2)

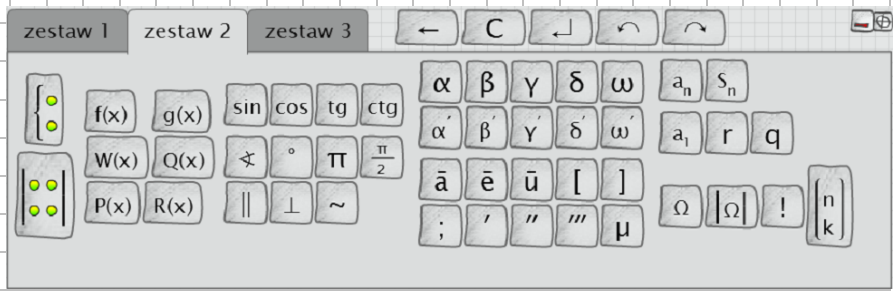
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3-2x^2+ax+\frac{3}{4}$ przez dwumian $x-2$ jest równa 1.

Oblicz wartość współczynnika a.

W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

1	2	5

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*



Zadanie 6. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=(1,0)$.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1};D_f=R$$
$$P=(1;0)$$
$$y=ax+b$$
$$a=f'(1)$$
$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2};D_{f'}=R$$
$$a=\frac{1}{2}$$
$$0=\frac{1}{2}\cdot 1+b$$
$$b=-\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0.$$

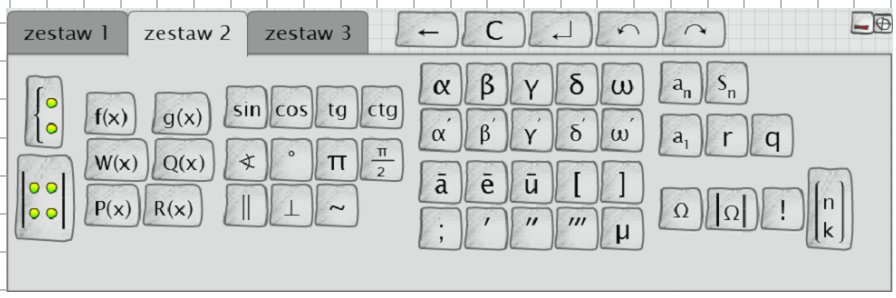
$$x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$$

$$2(x-y)^2=2x^2+2y^2-4xy$$

$$(xy-2)^2=x^2y^2-4xy+4$$

$$L=x^2y^2-4xy+4+2x^2+2y^2-4xy=(xy-2)^2+2(x-y)^2>0$$

cnd



Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.	7.
	Maks. liczba pkt	2	3	3
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 8. (0–3)

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\dfrac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

$$P_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} c x \sin\frac{\beta}{2}$$

$$P_{\Delta EBC} = \frac{1}{2} a x \sin\frac{\beta}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ac \sin\beta$$

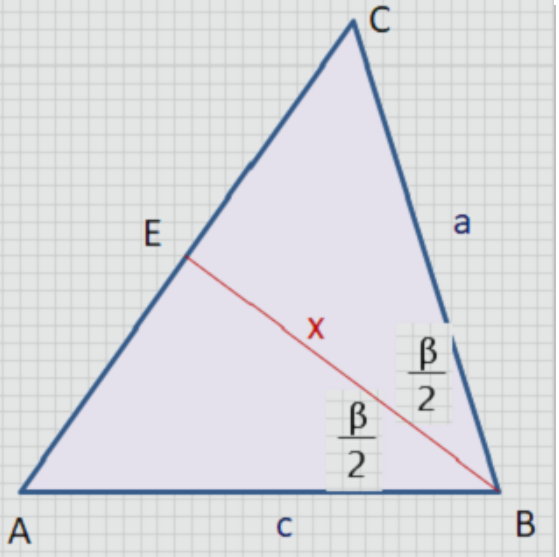
$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABE} + P_{\Delta EBC}$$

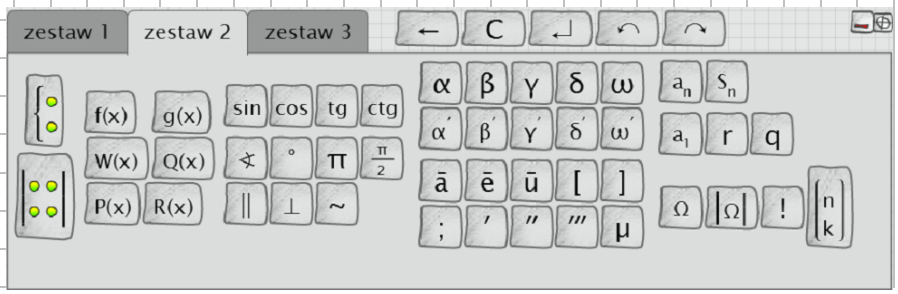
$$\frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} c x \sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} a x \sin\frac{\beta}{2}$$

$$ac \cdot 2 \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} = x \sin\frac{\beta}{2} (c+a)$$

$$x = \frac{2ac \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{(a+c)\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{2ac \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

cnd





Zadanie 9. (0–4)

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

$$V' = \frac{8}{27}V$$

$$\frac{V'}{V} = k^3 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$a = 6 \Rightarrow a' = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$$

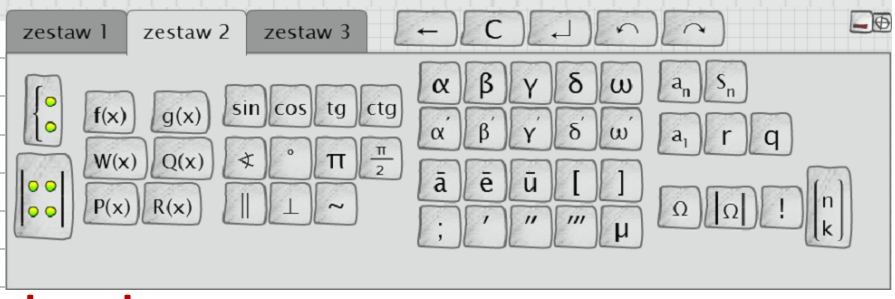
$$r = \frac{1}{4}H$$

$$H = 2\sqrt{6}$$

$$h = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

$$x = H - h - r = 2\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}$$



Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	8.	9.
	Maks. liczba pkt	3	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\cos 2x + 3\cos x = -2 ; x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x = -2$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\cos x = t ; t \in \langle -1; 1 \rangle$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

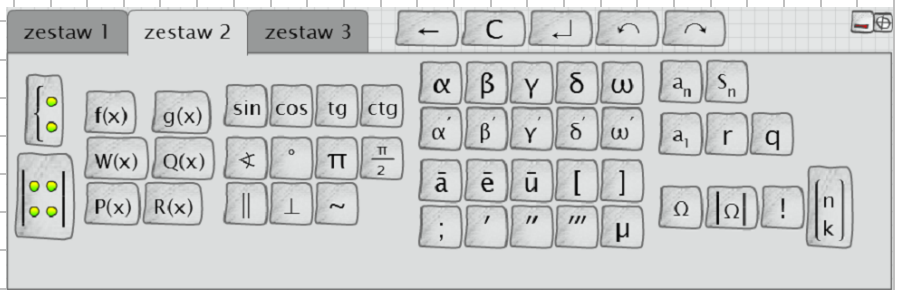
$t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$

$t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

$\cos x = -1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{3} \vee x = \pi + \frac{\pi}{3}$

$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi; \pi; \frac{4}{3}\pi \right\}$



Odpowiedź: .....

e-math.pl

Zadanie 11. (0–4)

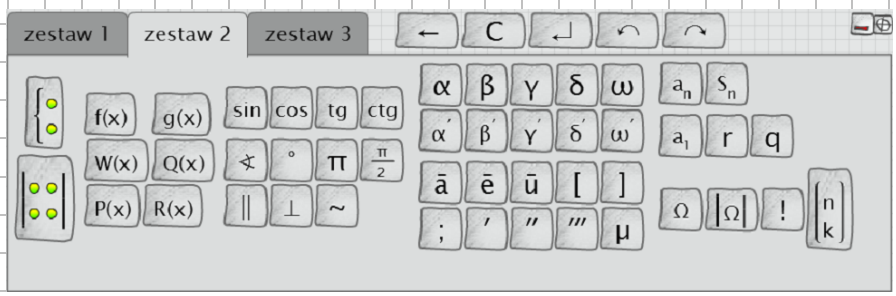
W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

$$|\Omega| = 8^3$$

$$|A| = 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 3! + 2 \cdot 4 \cdot 8$$

$$|A| = 8 \cdot \left(3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + 6 + 8\right) = 8 \cdot 44$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8 \cdot 44}{8^3} = \frac{44}{64} = \frac{11}{16}$$



Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2, przy czym $x_1<x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0.$$

$4x^2-6mx+\left[2m+3\right]\left[m-3\right]=0$

$a=4\neq 0$

$1)\ \Delta>0$

$2)\ \left(4x_1-4x_2-1\right)\left(4x_1-4x_2+1\right)<0;x_1<x_2$

$1)\ \Delta=36m^2-16\left(2m^2-6m+3m-9\right)=36m^2-32m^2+48m+144$

$4m^2+48m+144>0$

$m^2+12m+36>0$

$\left(m+6\right)^2>0$

$m\in R-\left\{-6\right\}$

$2)\ \left(4\left(x_1-x_2\right)-1\right)\left(4\left(x_1-x_2\right)+1\right)<0$

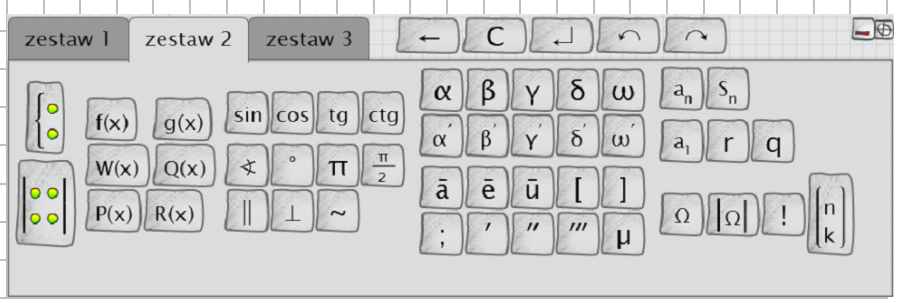
$\left(16\left(x_1-x_2\right)^2-1\right)<0$

$16\left(x_1{}^2-2x_1x_2+x_2{}^2\right)-1<0$

$16\left(\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right)-1<0$

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}$



$$16\left[\left[\frac{6m}{4}\right]^2-4\cdot\frac{2m^2-3m-9}{4}\right]-1<0$$

$$16\left[\frac{36m^2}{16}-2m^2+3m+9\right]-1<0$$

$$36m^2-32m^2+48m+144-1<0$$

$$4m^2+48m+143<0$$

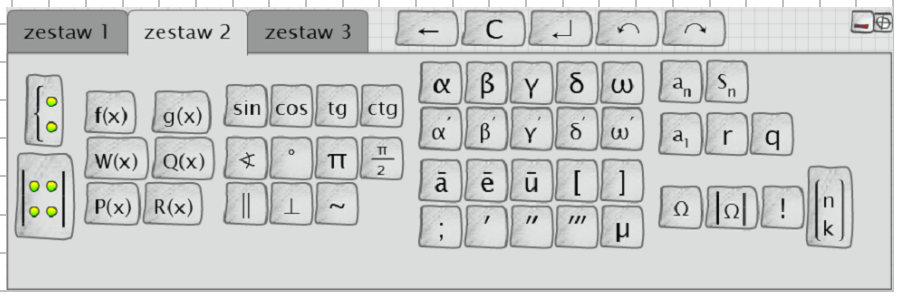
$$\Delta_m=16$$

$$m_1=\frac{-48-4}{8}=-6{,}5$$

$$m_2=\frac{-44}{8}=-5{,}5$$

$$m\in\left(-6{,}5;-5{,}5\right)$$

$$1)\wedge 2)\Rightarrow m\in\left(-6{,}5;-6\right]\cup\left(-6;-5{,}5\right)$$



Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	12.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 13. (0–5)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-3y+1=0$.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$S=(a;b)\in y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$S=\left(a;\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\right)$$

$$|AS|=|BS|$$

$$|AS|=\sqrt{(a+5)^2+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}-3\right)^2}$$

$$|BS|=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}-6\right)^2}$$

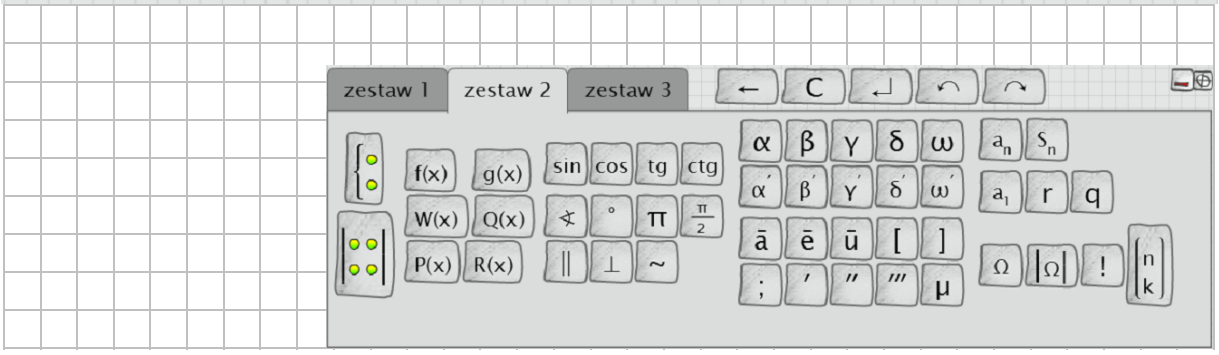
$$a^2+10a+25+\frac{1}{9}a^2-\frac{16}{3}a+\frac{64}{9}=a^2+\frac{1}{9}a^2-\frac{34}{3}a+\frac{289}{9}$$

$$10a-\frac{16}{3}a+\frac{34}{3}a=\frac{289}{9}-\frac{64}{9}-25$$

$$16a=0$$

$$a=0\wedge b=\frac{1}{3}\wedge r=\frac{17}{3}$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$$



Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	13.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 14. (0–6)

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny.

Wyznacz liczby a, b, c.

$$2b=a+c \Rightarrow c=2b-a$$

$$a+b+c=27 \Rightarrow 3b=27 \Rightarrow b=9 \Rightarrow c=18-a$$

$$b^2=(a-2)(2c+1)$$

$$81=(a-2)(36-2a+1)$$

$$81=37a-2a^2-74+4a$$

$$2a^2-41a+155=0$$

$$\Delta=441$$

$$a_1=\frac{41-21}{4}=5$$

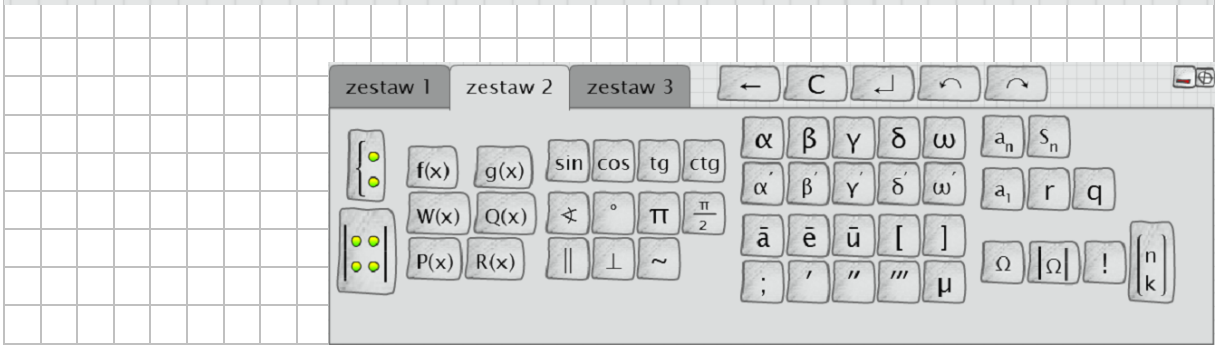
$$a_2=\frac{41+21}{4}=15,5$$

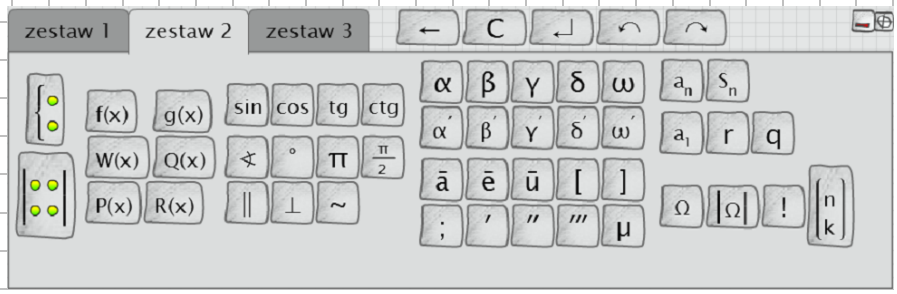
$$b=9$$

$$c_1=18-5=13$$

$$c_2=18-15,5=2,5$$

$$(5;9;13) \vee (15,5;9;2,5)$$





Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Dane: P

$V \to \max$

$V = \pi r^2 \cdot H \to \max$

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r H$

$H = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} > 0 \Rightarrow r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$

$V = \pi r^2 \cdot \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}$

$V(r) = -\pi r^3 + \frac{1}{2}Pr; r \in \left(0; \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$

$V'(r) = -3\pi r^2 + \frac{1}{2}P$

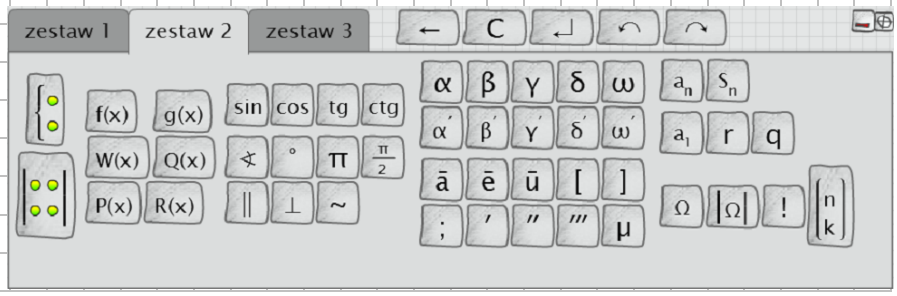
$V'(r) = 0 \Leftrightarrow -3\pi r^2 + \frac{1}{2}P = 0$

$-3\pi\left(r^2 - \frac{P}{6\pi}\right) = 0$

$r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}} \wedge \text{dla}, r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, V(r) = \max$

$H = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$

$$V_{max} = \frac{P}{6} \cdot \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$$



Odpowiedź: ..... .

e-math.pl

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS ***(nie podlega ocenie)***